Пределы

Теоретические материалы и практикум

Павел Косило | 1 сентября 2026

Теоретическая справка

1. Предел функции в точке

Окрестностью точки называется любой промежуток, содержащий данную точку, причём данная точка обязательно является внутренней точкой выбранного промежутка.

Задача 1.

Определение предела. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если в окрестности точки a значение функции приближается к числу A. Обозначение:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Односторонние пределы. Предел справа записывают $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$. Предел слева записывают $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$.

Если функция имеет в некоторой точке равные пределы справа и слева, то существует и её предел в этой точке:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = A \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = A.$$

---

2. Правила вычисления пределов

Если функция определена в некоторой точке (непрерывна в ней), то её предел в этой точке равен её значению: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Если пределы $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$ существуют, то:

1. $\lim\limits_{x \to a} c = c$, где c — константа;
2. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$;
4. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, если $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$.

3. Предел на бесконечности и неопределённости

При $x \to \infty$ (как к $+\infty$, так и к $-\infty$) значения функции могут стремиться к конкретному числу; например, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Часто встречаются неопределённости

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad [0\cdot\infty], \quad [\infty-\infty], \quad [0^0], \quad [\infty^0], \quad [1^\infty].$$

Для их раскрытия используют алгебраические преобразования (разложение на множители, домножение на сопряжённое) и замечательные пределы.

4. Замечательные пределы

Задача 2.

Первый замечательный предел применяется при неопределённости $\left[\frac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Следствия: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$.

Задача 3.

Второй замечательный предел применяется при неопределённости $[1^\infty]$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e, \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Практикум 1. Алгебраические пределы и раскрытие неопределённостей $\left[\frac{0}{0}\right]$

Указание: разложите числитель и знаменатель на множители или домножьте на сопряжённое выражение.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\dfrac{2}{5}$
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{8-x^3}=\dfrac{1}{4}$
3. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=6$
4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^3-8}=\dfrac{3}{4}$
5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}=-\dfrac{1}{3}$
6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{2+x-x^2}=-\dfrac{4}{3}$
7. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)=-\dfrac{1}{2}$
8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x-1}{x^3+1}=\infty$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-3x}{2x^2-9x}=\dfrac{1}{3}$
10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-1}{x}=-\dfrac{1}{3}$
12. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-4}{x^2-9}=\dfrac{1}{48}$
13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}=\dfrac{1}{2}$
14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}=4$
15. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}=-\dfrac{5}{12}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x}-1}=0$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=-\sqrt{5}$

18. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}=\dfrac{1}{2}$

19. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}=\dfrac{2}{3}$

20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-\sqrt{3x}}=2$

21. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1}=\dfrac{1}{3}$

22. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\dfrac{1}{4}$

Практикум 2. Первый замечательный предел

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\sin 3x}{x}=5$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}=\dfrac{3}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}=\dfrac{1}{20}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}=6$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{2x^2}=-3$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}=\dfrac{25}{4}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}=8$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 2x}{\sin x}=5$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}=\dfrac{1}{2}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=2$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}=4$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\sin x}{x^2}=2$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3\operatorname{tg} x}=1$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 7x-\sin 5x}=\dfrac{1}{2}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x^2+6x}=\dfrac{1}{3}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{3x^2}=1$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} 2x}\right)=0$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{x\sin x}=-2$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\sin^2 7x}=\dfrac{9}{98}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} x}=1$

Практикум 3. Пределы на бесконечности и второй замечательный предел

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^2+3}{3x^3-5}=\infty$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x+1}{5x^2-2x-3}=\dfrac{3}{5}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}=-1$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2+(x-1)^2}=3$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1})=1$

6. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+5}\right)^{3x+1}=e^{-7}$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{1-x}=1$