# Интегральное исчисление

Теоретические материалы и практикум

Павел Косило | 2 сентября 2026

---

## Теоретическая справка

### Таблица первообразных элементарных функций

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех $x$ из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$. Неопределённый интеграл $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ — множество всех первообразных функций $f(x)$.

| Функция $f(x)$ | Первообразная $F(x)$ | Функция $f(x)$ | Первообразная $F(x)$ |
|---|---|---|---|
| $c$ | $cx$ | $\sin x$ | $-\cos x$ |
| $x^n,\ n \neq -1$ | $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ | $\cos x$ | $\sin x$ |
| $\sqrt{x}$ | $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $\operatorname{tg} x$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ | $-\operatorname{ctg} x$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $e^x$ | $e^x$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin x$ | $a^x$ | $\dfrac{a^x}{\ln a}$ |
| $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arccos x$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\operatorname{arctg} x$ |
| $-\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\operatorname{arcctg} x$ | | |

### Правила вычисления неопределённого интеграла

1. Интеграл от суммы или разности равен сумме или разности интегралов:

$$\int \bigl(f(x) \pm g(x)\bigr)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx = F(x) \pm G(x) + C.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx = aF(x) + C.$$

3. Интегрирование сложной функции с линейным аргументом:

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$$

### Метод замены переменной

Если подынтегральное выражение не является табличным, часто помогает введение новой переменной. Например,

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}.$$

Положим $\ln x = t$, тогда $\frac{1}{x}\,dx = dt$ и

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(\ln x) + C.$$

### Метод интегрирования по частям

Из формулы производной произведения $(UV)' = U'V + UV'$ получаем в дифференциалах $d(UV) = V\,dU + U\,dV$, а значит:

$$\int U\,dV = U \cdot V - \int V\,dU.$$

Мнемоническое правило: *«УДиВился У Всех на ВиДУ»*.

### Определённый интеграл и интегральная сумма

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$. Разобьём его на $n$ равных частей точками $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ и выберем на каждом отрезке точку $c_i$. Интегральной суммой называется

$$f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x.$$

Геометрически это сумма площадей прямоугольников под графиком. Определённый интеграл — предел интегральной суммы при $\Delta x \to 0$:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Для вычисления служит формула Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$.

## Практикум 1. Базовые интегралы

**Задание 1.** Найдите неопределённый интеграл.

1. $\int (x^2 - 2x + 1)\,dx$
2. $\int (3x^2 - 2\cos x)\,dx$
3. $\int (e^{2x} + e^x \sin x)\,dx$
4. $\int \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)\,dx$
5. $\int (x - 5e^x)\,dx$
6. $\int \dfrac{2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}\,dx$
7. $\int (1 + \cos x)\,dx$
8. $\int \dfrac{dx}{1 - \cos^2 2x}$
9. $\int (\sin x - \cos x)^2\,dx$
10. $\int \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}\,dx$
11. $\int \dfrac{3x+5}{7x}\,dx$
12. $\int \dfrac{2x^2 - 8}{16 - x^4}\,dx$
13. $\int 3xe^{2x}\,dx$

**Задание 2.** Вычислите интеграл, используя свойства линейности и сдвига аргумента.

1. $\int \cos 2x\, dx$
2. $\int \sin \dfrac{x}{3}\, dx$
3. $\int e^{-3x+2}\, dx$
4. $\int \cos^2 4x\, dx$
5. $\int \dfrac{dx}{5x+7}$
6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{6-x}}$
7. $\int (3x-1)^{10}\, dx$
8. $\int \dfrac{dx}{1+9x^2}$
9. $\int \sin^2 x\, dx$
10. $\int \cos(3x+2)\, dx$

## Практикум 2. Метод замены переменной

*Вычислите интеграл, используя метод замены переменной.*

1. $\int x\, e^{x^2}\, dx$
2. $\int x \cos x^2\, dx$
3. $\int \dfrac{x\, dx}{\sqrt{4+3x^2}}$
4. $\int \dfrac{3x\, dx}{9-4x^2}$
5. $\int \dfrac{x^2\, dx}{\sin^2 x^3}$
6. $\int \dfrac{3x^2\, dx}{\sqrt{9-x^3}}$
7. $\int \sin^3 x \cos x\, dx$
8. $\int (1+x^2) \operatorname{arctg} x\, dx$
9. $\int \dfrac{\sin(3x-1)}{\cos^4(3x-1)}\, dx$
10. $\int \dfrac{2e^x}{(1-e^x)^2}\, dx$
11. $\int \cos^2 x\, dx$
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{11+10x-x^2}}$
13. $\int x\sqrt{1-x^2}\, dx$
14. $\int x\sqrt{x-5}\, dx$
15. $\int \dfrac{dx}{1+\sqrt{x}}$
16. $\int \dfrac{\cos(\ln x)}{x}\, dx$
17. $\int \dfrac{\cos x}{1+\sin x}\, dx$
18. $\int \cos^5 x\, dx$
19. $\int \cos^4 x\, dx$
20. $\int \dfrac{\cos x}{2\cos^2 x}\, dx$
21. $\int \operatorname{tg} x\, dx$
22. $\int \sin x \cos x\, dx$ $(*)$
23. $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx$ $(*)$
24. $\int \dfrac{dx}{4x^2+12x+5}$

## Практикум 3. Интегрирование по частям

*Вычислите интеграл, используя формулу интегрирования по частям.*

1. $\int \ln x \, dx$
2. $\int x \cos x \, dx$
3. $\int (2x - 3)e^{3x} \, dx$
4. $\int (3x^2 + 2x - 5) \ln x \, dx$
5. $\int x^2 \sin x \, dx$
6. $\int \ln^2 x \, dx$
7. $\int e^x \sin x \, dx$
8. $\int (x - 1)e^{2x} \, dx$
9. $\int x \cdot 3^x \, dx$
10. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx$