Векторы и матрицы

Теоретические материалы и практикум

Алексей Чернуха | 3 октября 2026

Теоретическая справка

Обозначения. Векторы обозначаем полужирными строчными буквами ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}$), матрицы — прописными (A, B). Числа (их ещё называют *скалярами*) принято обозначать строчными буквами, чаще всего греческими: $\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \mu,\ \varphi$; иногда используют и латинские $t,\ s,\ k$. Множество всех векторов из n действительных чисел обозначают $\mathbb{R}^n$.

1. Векторы

Вектор размерности n — это упорядоченный набор из n чисел, которые называются его **координатами**:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Порядок координат важен: $(1, 2) \neq (2, 1)$. Геометрически вектор из $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$ — это направленный отрезок (стрелка) из начала координат в точку с теми же координатами. Вектором можно записать и набор измерений, например $(\text{рост},\ \text{вес},\ \text{возраст}) \in \mathbb{R}^3$.

Линейные операции. Пусть есть два вектора одной размерности, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, и число λ.

Сумма векторов — вектор, координаты которого равны суммам соответствующих координат:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1,\ \ldots,\ a_n + b_n).$$

Складывать можно только векторы одной размерности.

Произведение вектора на число — вектор, у которого каждая координата умножена на это число:

$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1,\ \ldots,\ \lambda a_n).$$

Разность векторов — это $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1)\mathbf{b} = (a_1 - b_1,\ \ldots,\ a_n - b_n)$.

Пример. $(1, 2, 2) + (2, -1, 2) = (3, 1, 4)$, $\ 2 \cdot (1, 2, 2) = (2, 4, 4)$. Геометрически сумма строится по правилу параллелограмма, а умножение на λ растягивает вектор в $|\lambda|$ раз (и разворачивает его при $\lambda < 0$).

Нулевой вектор $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$: для любого $\mathbf{a}$ выполнено $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$.

Противоположный вектор к $\mathbf{a}$ — это $-\mathbf{a} = (-1) \cdot \mathbf{a}$.

Длина (евклидова норма) вектора $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

На плоскости это теорема Пифагора: $\|(3, 4)\| = \sqrt{9 + 16} = 5$ — длина гипотенузы при катетах 3 и 4. Ещё пример: $\|(1, 2, 2)\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$. Длина равна нулю только у нулевого вектора, и $\|\lambda\mathbf{a}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{a}\|$.

Единичный вектор — вектор длины 1. Любой ненулевой вектор можно *нормировать*, разделив на его длину: $\mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$ — единичный вектор того же направления. Для $\mathbf{a} = (3, 4)$ получаем $\mathbf{e} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

2. Скалярное произведение

Скалярным произведением векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ называется *число*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Встречаются также обозначения $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. Пример: $(1, 2, 3) \cdot (4, -5, 6) = 4 - 10 + 18 = 12$.

Свойства (для любых векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и любого числа λ):

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (коммутативность, или симметричность);
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ (дистрибутивность, или распределительный закон);
3. $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ (ассоциативность относительно умножения на число, или однородность);
4. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2 \geq 0$, причём $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ только при $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Свойства 2 и 3 вместе называют *линейностью* скалярного произведения (по первому множителю). Из свойства 4 следует, что длину можно вычислять через скалярное произведение: $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

Геометрический смысл. Для векторов на плоскости и в пространстве

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos\varphi,$$

где $\varphi \in [0; \pi]$ — угол между векторами. Знак скалярного произведения показывает характер угла: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$ — угол острый, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ — тупой, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ — прямой.

Ортогональность. Векторы называются **ортогональными** ($\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$), если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Например, $(1, 2, 2) \perp (2, 1, -2)$, так как $2 + 2 - 4 = 0$. Нулевой вектор считается ортогональным любому.

Проекция. Число $\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$) — это длина «тени» вектора $\mathbf{b}$ на прямую, содержащую $\mathbf{a}$, взятая со знаком «$-$», если угол тупой. Пример: для $\mathbf{a} = (3, 4)$, $\mathbf{b} = (2, 1)$ получаем $\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = \frac{6+4}{5} = 2$.

3. Угол между векторами

Для *ненулевых* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из формулы скалярного произведения получаем

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}, \qquad \varphi \in [0; \pi].$$

Для нулевого вектора угол не определён (знаменатель обращается в ноль). Частные случаи: $\cos\varphi = 1$ — векторы сонаправлены ($\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, $\lambda > 0$); $\cos\varphi = -1$ — противоположно направлены ($\lambda < 0$); $\cos\varphi = 0$ — ортогональны.

Пример. $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 1)$: $\cos\varphi = \dfrac{1 + 0 + 0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$, значит, $\varphi = \dfrac{\pi}{3} = 60^\circ$.

Формула верна и в $\mathbb{R}^n$ при любом n. Заметим, что значение $\cos\varphi$ не меняется при растяжении векторов: оно зависит только от их направлений.

4. Поэлементное (поточечное) произведение векторов

Поэлементное произведение (произведение Адамара) двух векторов *одинаковой размерности* — это вектор той же размерности, координаты которого равны произведениям соответствующих координат:

$$\mathbf{a} \odot \mathbf{b} = (a_1 b_1,\ a_2 b_2,\ \ldots,\ a_n b_n).$$

Пример: $(1, 2, 3) \odot (4, -5, 6) = (4, -10, 18)$.

Не путайте со скалярным произведением! Скалярное произведение даёт *число*, а поэлементное — *вектор*. Связь такая: сумма координат вектора $\mathbf{a} \odot \mathbf{b}$ как раз равна $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (в примере выше $4 - 10 + 18 = 12$).

5. Векторное произведение в $\mathbb{R}^3$

Векторным произведением векторов $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ называется вектор

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \big(a_2 b_3 - a_3 b_2,\ \ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ \ a_1 b_2 - a_2 b_1\big).$$

Встречается и обозначение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Оно определено именно для трёхмерных векторов, и в отличие от скалярного, его результат — *вектор*.

Пример. $(1, 2, 3) \times (4, 5, 6) = (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5,\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6,\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = (-3, 6, -3)$. Проверка: $(-3, 6, -3) \cdot (1, 2, 3) = -3 + 12 - 9 = 0$ и $(-3, 6, -3) \cdot (4, 5, 6) = -12 + 30 - 18 = 0$.

Свойства.

1. $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (антикоммутативность); в частности, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, и вообще $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ для коллинеарных векторов.
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ортогонален и $\mathbf{a}$, и $\mathbf{b}$.
3. $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sin\varphi$ — это **площадь параллелограмма**, построенного на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; площадь треугольника вдвое меньше. В примере выше площадь параллелограмма равна $\|(-3, 6, -3)\| = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.
4. Направление задаётся **правилом правой руки**: если пальцы правой руки поворачивают от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ по кратчайшему пути, то большой палец указывает направление $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

6. Матрицы

Матрицей размеров $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

Элемент a_{ij} стоит в i-й строке и j-м столбце: *сначала номер строки, потом столбца*. Например, у матрицы $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ размер 2×3 и $a_{21} = -1$, $a_{13} = 2$. Каждую строку матрицы можно рассматривать как вектор из $\mathbb{R}^n$, каждый столбец — как вектор из $\mathbb{R}^m$.

Матрица-строка — матрица из одной строки ($1 \times n$); **матрица-столбец** — матрица из одного столбца ($m \times 1$).

Сложение определено для матриц *одного размера*, умножение на число — для любых, оба действия выполняются поэлементно: $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Поэлементное произведение матриц одного размера определяется так же, как для векторов (п. 4): $(A \odot B)_{ij} = a_{ij} b_{ij}$. Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 7 & 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 21 & 32 \end{pmatrix}.$$

Не путайте его с матричным произведением AB из следующего пункта: результаты у них разные.

Частные виды матриц.

Нулевая O	все элементы равны нулю	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Квадратная порядка n	число строк равно числу столбцов, $m = n$; элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ образуют **главную диагональ** (здесь $1, 5, 9$)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
Диагональная	квадратная, все элементы вне главной диагонали равны нулю; обозначение $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
Единичная E (часто пишут I)	диагональная, на диагонали стоят единицы; для любой подходящей матрицы $AE = EA = A$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Симметрическая	квадратная, $a_{ij} = a_{ji}$ при всех i, j, то есть $A^T = A$ (см. п. 8)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

7. Умножение матриц

Произведение AB определено, только если **число столбцов A равно числу строк B**:

$$\underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{B}_{n \times k} = \underbrace{C}_{m \times k}, \qquad c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}.$$

Правило «**строка на столбец**»: элемент c_{ij} равен скалярному произведению i-й строки A на j-й столбец B. Идём по строке слева направо и по столбцу сверху вниз, перемножаем встретившиеся числа и складываем. Вот как получаются два элемента произведения $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{smallmatrix}\right)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

$c_{12} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 22$ $\qquad$ $c_{21} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 43$

Синим выделена строка первой матрицы, оранжевым — столбец второй, зелёным — элемент результата, который получается из них. Аналогично находятся остальные элементы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

Матрицы разных размеров тоже можно перемножать, если размеры согласованы:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{3\times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3+0+2 & 1+0+0 \\ -3+6+1 & -1+3+0 \end{pmatrix}}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Свойства.

1. Умножение **некоммутативно**: в общем случае $AB \neq BA$ (см. первый пример). Бывает, что AB существует, а BA — нет, или что они разного размера: во втором примере BA — матрица 3×3.
2. **Ассоциативность**: $(AB)C = A(BC)$; **дистрибутивность**: $A(B+C) = AB+AC$, $(A+B)C = AC + BC$.
3. $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$; $AE = EA = A$.

Умножение матрицы на вектор. Вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ записываем столбцом $(n \times 1)$; тогда $A\mathbf{x}$ — столбец из m чисел, и его i-я координата есть скалярное произведение i-й строки A на $\mathbf{x}$. Отображение $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ является **линейным преобразованием**: $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$, $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x}$. Например, матрица R ниже поворачивает векторы плоскости на 90° против часовой стрелки:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 2 + (-1)\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

8. Транспонирование

Транспонированная к матрице A размера $m \times n$ — матрица A^T размера $n \times m$, у которой j-й столбец составлен из элементов j-й строки A (строки и столбцы меняются ролями): $(A^T)_{ij} = a_{ji}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Свойства: $(A^T)^T = A$; $(A+B)^T = A^T + B^T$; $(\lambda A)^T = \lambda A^T$; $(AB)^T = B^T A^T$ (порядок множителей меняется!).

Строки и столбцы. Транспонирование превращает вектор-столбец в вектор-строку и обратно. Если $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ — столбцы из $\mathbb{R}^n$, то

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = \underbrace{(a_1 \ \dots \ a_n)}_{1\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} = a_1b_1 + \dots + a_nb_n = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b},$$

то есть скалярное произведение — частный случай матричного (результат 1×1 отождествляем с числом). А вот $\mathbf{a}\mathbf{b}^T$ — уже матрица $n \times n$ (её называют *внешним произведением*).

Практикум

Векторы в задачах записаны строками, но при умножении матрицы на вектор вектор считается столбцом.

Часть 1. Векторы

Задача 1.

Даны векторы $\mathbf{a} = (2, -1, 2)$ и $\mathbf{b} = (1, 4, -2)$. Найдите

а) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$;

б) $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$;

в) $\|\mathbf{a}\|$ и $\|\mathbf{b}\|$;

г) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$;

д) $\mathbf{a} \odot \mathbf{b}$;

е) сумму координат $\mathbf{a} \odot \mathbf{b}$.

Задача 2.

Нормируйте вектор $\mathbf{c} = (6, -2, 3)$, то есть найдите единичный вектор того же направления. Затем найдите вектор длины 14, сонаправленный с $\mathbf{c}$.

Задача 3.

Найдите угол между векторами:

а) $(1, 1)$ и $(-1, 0)$;

б) $(2, 1, -2)$ и $(1, 1, 0)$;

в) $(1, 2, 3)$ и $(3, 0, -1)$.

Задача 4.

При каком значении t векторы $\mathbf{p} = (t, 2, 1)$ и $\mathbf{q} = (3, t, -5)$ ортогональны?

Задача 5.

Найдите $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ для $\mathbf{a} = (2, 1, 0)$ и $\mathbf{b} = (1, 3, -1)$. Проверьте с помощью скалярного произведения, что результат ортогонален $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Чему равны $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ и $\mathbf{a} \times (2\mathbf{a})$? Ответ на последний вопрос дайте без вычислений.

Задача 6.

Даны точки $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 3)$, $C(3, 2, -1)$.

а) Найдите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и их длины.

б) Найдите угол BAC треугольника ABC.

в) Найдите площадь треугольника ABC с помощью векторного произведения и проверьте ответ, используя пункт б).

Часть 2. Матрицы

Задача 7.

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Найдите

а) $A + 2B$;

б) A^T;

в) $A \odot B$;

г) AB;

д) BA;

е) $(AB)^T$ и $B^T A^T$.

Совпадают ли AB и BA? Совпадают ли матрицы из пункта е)?

Задача 8.

Пусть A — матрица 2×3, B — 3×4, C — 4×2, $\mathbf{x}$ — столбец 3×1. Какие из выражений имеют смысл? Для имеющих смысл укажите размер результата.

а) AB;

б) BA;

в) ABC;

г) CA;

д) $A\mathbf{x}$;

е) $\mathbf{x}^T A^T$;

ж) $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$;

з) $\mathbf{x}\mathbf{x}^T$;

и) $A \odot B$.

Ответы для самопроверки

1. а) $(3, 3, 0)$; б) $(4, -11, 10)$; в) 3 и $\sqrt{21}$; г) -6; д) $(2, -4, -4)$; е) -6, как и в пункте г).

2. $\left(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$; $(12, -4, 6)$.

3. а) $135°$; б) $45°$; в) $90°$.

4. $t = 1$.

5. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-1, 2, 5)$; $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = (1, -2, -5)$; $\mathbf{a} \times (2\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ (векторы коллинеарны).

6. а) $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 1, -2)$, обе длины равны 3; б) $90°$; в) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-6, 6, -3)$, его длина 9, площадь $\frac{9}{2}$ (по катетам: $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3$).

7. а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$; е) обе равны $\begin{pmatrix} -2 & 12 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. $AB \neq BA$.

8. а) 2×4; б) нет; в) 2×2; г) 4×3; д) 2×1; е) 1×2; ж) 1×1 (число $\|\mathbf{x}\|^2$); з) 3×3; и) нет.