

# Пределы

Теоретические материалы и практикум

ПРОЕКТ | 1 сентября 2026

---

## Теоретическая справка

### 1. Предел функции в точке

Окрестностью точки называется любой промежуток, содержащий данную точку, причём данная точка обязательно является внутренней точкой выбранного промежутка.

#### Задача 1.

**Определение предела.** Число  $A$  называется пределом функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , если в окрестности точки  $a$  значение функции приближается к числу  $A$ . Обозначение:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

**Односторонние пределы.** Предел справа записывают  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$ . Предел слева записывают  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$ .

Если функция имеет в некоторой точке равные пределы справа и слева, то существует и её предел в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

---

### 2. Правила вычисления пределов

Если функция определена в некоторой точке (непрерывна в ней), то её предел в этой точке равен её значению:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Если пределы  $f(x)$  и  $g(x)$  при  $x \rightarrow a$  существуют, то:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ , где  $c$  — константа;
2.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ;
3.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ;
4.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ .

### 3. Предел на бесконечности и неопределённости

При  $x \rightarrow \infty$  (как к  $+\infty$ , так и к  $-\infty$ ) значения функции могут стремиться к конкретному числу; например,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ .

Часто встречаются неопределённости

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad [0 \cdot \infty], \quad [\infty - \infty], \quad [0^0], \quad [\infty^0], \quad [1^\infty].$$

Для их раскрытия используют алгебраические преобразования (разложение на множители, деление на сопряжённое) и замечательные пределы.

#### 4. Замечательные пределы

##### Задача 2.

**Первый замечательный предел** применяется при неопределённости  $\left[\frac{0}{0}\right]$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Следствия:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ .

---

##### Задача 3.

**Второй замечательный предел** применяется при неопределённости  $[1^\infty]$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

---

### Практикум 1. Алгебраические пределы и раскрытие неопределённостей $\left[\frac{0}{0}\right]$

*Указание: разложите числитель и знаменатель на множители или домножьте на сопряжённое выражение.*

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x}{2x^2 - 5x} = \frac{2}{5}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{8 - x^3} = \frac{1}{4}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1} = 6$

4.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 8} = \frac{3}{4}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = -\frac{1}{3}$

6.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2 + x - x^2} = -\frac{4}{3}$

7.  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^3+8} \right) = -\frac{1}{2}$

8.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^3 + 1} = \infty$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 3x}{2x^2 - 9x} = \frac{1}{3}$

10.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = 2$

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - 1}{x} = -\frac{1}{3}$

12.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{x^2 - 9} = \frac{1}{48}$

13.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1} = \frac{1}{2}$

14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4} - 2} = 4$

15.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5} = -\frac{5}{12}$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x} - 1} = 0$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}} = -\sqrt{5}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3} = \frac{1}{2}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{\sqrt{x+2} - 2} = \frac{2}{3}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - \sqrt{3x}} = 2$$

$$21. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1} = \frac{1}{3}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5} = \frac{1}{4}$$

## Практикум 2. Первый замечательный предел

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin 3x}{x} = 5$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \frac{3}{2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sin 5x} = \frac{1}{20}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \sin 3x} = 6$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{2x^2} = -3$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2} = \frac{25}{4}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1} = 8$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 2x}{\sin x} = 5$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \frac{1}{2}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2} = 4$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \sin x}{x^2} = 2$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3 \operatorname{tg} x} = 1$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 7x - \sin 5x} = \frac{1}{2}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x^2 + 6x} = \frac{1}{3}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{3x^2} = 1$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \right) = 0$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x \sin x} = -2$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin^2 7x} = \frac{9}{98}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\operatorname{tg} x} = 1$$

## Практикум 3. Пределы на бесконечности и второй замечательный предел

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^2 + 3}{3x^3 - 5} = \infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + 1}{5x^2 - 2x - 3} = \frac{3}{5}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x} = -1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{(x+1)^2 + (x-1)^2} = 3$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}) = 1$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-2}{3x+5} \right)^{3x+1} = e^{-7}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+x}{2+x} \right)^{1-x} = 1$$