

Интегральное исчисление

Теоретические материалы и практикум

ПРОЕКТ | 2 сентября 2026

Теоретическая справка

Таблица первообразных элементарных функций

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$. Неопределённый интеграл $\int f(x) dx = F(x) + C$ — множество всех первообразных функций $f(x)$.

Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$	Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$
c	cx	$\sin x$	$-\cos x$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\cos x$	$\sin x$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	e^x	e^x
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$
$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcctg} x$		

Правила вычисления неопределённого интеграла

1. Интеграл от суммы или разности равен сумме или разности интегралов:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx = F(x) \pm G(x) + C.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx = aF(x) + C.$$

3. Интегрирование сложной функции с линейным аргументом:

$$\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C.$$

Метод замены переменной

Если подынтегральное выражение не является табличным, часто помогает введение новой переменной. Например,

$$\int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}.$$

Положим $\ln x = t$, тогда $\frac{1}{x} dx = dt$ и

$$\int \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(\ln x) + C.$$

Метод интегрирования по частям

Из формулы производной произведения $(UV)' = U'V + UV'$ получаем в дифференциалах $d(UV) = V dU + U dV$, а значит:

$$\int U dV = U \cdot V - \int V dU.$$

Мнемоническое правило: «УДуВиЛся У Всех на ВиДУ».

Определённый интеграл и интегральная сумма

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$. Разобьём его на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и выберем на каждом отрезке точку c_i . Интегральной суммой называется

$$f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \dots + f(c_n)\Delta x.$$

Геометрически это сумма площадей прямоугольников под графиком. Определённый интеграл — предел интегральной суммы при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Для вычисления служит формула Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$.

Практикум 1. Базовые интегралы

Задание 1. Найдите неопределённый интеграл.

1. $\int (x^2 - 2x + 1) dx$

2. $\int (3x^2 - 2 \cos x) dx$

3. $\int (e^{2x} + e^x \sin x) dx$

4. $\int \left(x^2 - \frac{2}{x}\right) dx$

5. $\int (x - 5e^x) dx$

6. $\int \frac{2 \cos^2 x + 1}{\cos^2 x} dx$

7. $\int (1 + \cos x) dx$

8. $\int \frac{dx}{1 - \cos^2 2x}$

9. $\int (\sin x - \cos x)^2 dx$

10. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

11. $\int \frac{3x + 5}{7x} dx$

12. $\int \frac{2x^2 - 8}{16 - x^4} dx$

13. $\int 3xe^{2x} dx$

Задание 2. Вычислите интеграл, используя свойства линейности и сдвига аргумента.

1. $\int \cos 2x \, dx$

2. $\int \sin \frac{x}{3} \, dx$

3. $\int e^{-3x+2} \, dx$

4. $\int \cos^2 4x \, dx$

5. $\int \frac{dx}{5x+7}$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{6-x}}$

7. $\int (3x-1)^{10} \, dx$

8. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$

9. $\int \sin^2 x \, dx$

10. $\int \cos(3x+2) \, dx$

Практикум 2. Метод замены переменной

Вычислите интеграл, используя метод замены переменной.

1. $\int x e^{x^2} \, dx$

2. $\int x \cos x^2 \, dx$

3. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{4+3x^2}}$

4. $\int \frac{3x \, dx}{9-4x^2}$

5. $\int \frac{x^2 \, dx}{\sin^2 x^3}$

6. $\int \frac{3x^2 \, dx}{\sqrt{9-x^3}}$

7. $\int \sin^3 x \cos x \, dx$

8. $\int (1+x^2) \operatorname{arctg} x \, dx$

9. $\int \frac{\sin(3x-1)}{\cos^4(3x-1)} \, dx$

10. $\int \frac{2e^x}{(1-e^x)^2} \, dx$

11. $\int \cos^2 x \, dx$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{11+10x-x^2}}$

13. $\int x \sqrt{1-x^2} \, dx$

14. $\int x \sqrt{x-5} \, dx$

15. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

16. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} \, dx$

17. $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} \, dx$

18. $\int \cos^5 x \, dx$

19. $\int \cos^4 x \, dx$

20. $\int \frac{\cos x}{2 \cos^2 x} \, dx$

21. $\int \operatorname{tg} x \, dx$

22. $\int \sin x \cos x \, dx \quad (*)$

23. $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx \quad (*)$

24. $\int \frac{dx}{4x^2+12x+5}$

Практикум 3. Интегрирование по частям

Вычислите интеграл, используя формулу интегрирования по частям.

1. $\int \ln x \, dx$
2. $\int x \cos x \, dx$
3. $\int (2x - 3)e^{3x} \, dx$
4. $\int (3x^2 + 2x - 5) \ln x \, dx$
5. $\int x^2 \sin x \, dx$
6. $\int \ln^2 x \, dx$
7. $\int e^x \sin x \, dx$
8. $\int (x - 1)e^{2x} \, dx$
9. $\int x \cdot 3^x \, dx$
10. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx$